18.02.2016

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ: μέρος της Αφηρημένη Άλγεβρα
Μοντέρνα Άλγεβρα.

ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ:

- (Al-Khwarizmi 825 μ.Χ)
- Cardano (1545)
- D' Alabert - Gauss (1746-1749)
- Ruffin - Abel (1799 - 1820)
- Galois - Lagrange - Cauchy [Εισαγωγή της έννοιας της Ομάδας.
- Cayley (1843-1845) → Ορισμός ομάδας (Αρχή Αφηρημένης Άλγεβρας)
- Lame (1847) (Διοφ. εξ. $x^n+y^n=z^n$)
- Kummer - Dedekind - Dirichlet
- Hamilton (1843): Τετράνια του Hamilton.
- (1914): Εισαγωγή της έννοιας του Δακτυλίου
- (1920-1930): Artin - Noether.

Σχέσεις ισοδυναμίας

1) Αν X, Y είναι σύνολα, τότε μια σχέση R από το X στο Y είναι ένα υποσύνολο $R \subseteq X \times Y$.

Παράδειγμα: $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ → Είναι μια σχέση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$

Μια απεικόνιση από το X στο Y είναι μια σχέση f από το X στο Y, έτσι ώστε: $\forall x \in X$, $\exists!\, y \in Y : (x,y) \in f$

Το μοναδικό στοιχείο $y \in Y : (x,y) \in f$ συμβολίζεται με $f(x)$ και τότε θα γράφουμε: $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$

2) Αν X είναι ένα σύνολο, τότε μια σχέση R επί του X καλείται σχέση ισοδυναμίας επί του X $\iff$

α) $\forall x \in X : (x,x) \in R$ (ανακλαστική ιδιότητα)

β) $\forall x,y \in X : (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ (συμμετρική ιδιότητα)

γ) $\forall x,y,z \in X : \left.\begin{matrix}(x,y) \in R \\ (y,z) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x,z) \in R$ (μεταβατική ιδιότητα)

• Αν R είναι μια σχέση (ισοδυναμίας) επί του συνόλου X, τότε αντί για $(x,y) \in R$, θα γράφουμε ισοδύναμα:

$\boxed{x \sim_R y}$

Έτσι λοιπόν η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X $\iff$

α) $\forall x \in X : x \sim_R x$

β) $\forall x,y \in X : x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$

γ) $\forall x,y,z \in X : \left.\begin{matrix} x \sim_R y \\ y \sim_R z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \sim_R z$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω στο $\mathbb{R}$ η σχέση: $\forall x,y \in \mathbb{R}$:

$$x \sim_R y \iff x \cdot y > 0$$

• Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $X \neq \emptyset$

Ορίζουμε μια σχέση I_X επί του X ως εξής:

$$\forall x,y \in X : x \sim_{I_X} y \iff x = y$$

Τότε η σχέση I_X είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X και η οποία περιγράφεται ως εξής:

$I_x = \{(x,x)\in X\times X \mid x\in X\}$

Αν $\mathcal{R}$ είναι τυχούσα σχέση ισοδυναμίας επί του X τότε:
$I_x \subseteq \mathcal{R}$

Ορίζομε μια σχέση M_x επί του X ως εξής:
$\forall x,y\in X: x \sim_{M_x} y$. Τότε η M_x είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X, η οποία περιγράφεται ως
$M_x = X\times X = \{(x,y)\in X\times X \mid {x\in X \atop y\in X}\}$

Άρα αν $\mathcal{R}$ τυχούσα σχέση ισοδυναμίας επί του X, τότε: $I_x \subseteq \mathcal{R} \subseteq M_x$.

$\forall x\in X$: η κλάση ισοδυναμίας του x ως προς την $\mathcal{R}$, ορίζεται να είναι το υποσύνολο

$[x]_{\mathcal{R}} = \{y\in X \mid y\sim_{\mathcal{R}} x\} = \{y\in X \mid (y,x)\in\mathcal{R}\} =$

$= \{y\in X \mid (x,y)\in\mathcal{R}\} = \{y\in X \mid x\sim_{\mathcal{R}} y\}$

- Το σύνολο πηλίκο του συνόλου X ως προς τη σχ. ισοδ. $\mathcal{R}$, είναι: $X/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} \subseteq X \mid x\in X\}$

Λήμμα: Έστω $\mathcal{R}$ μια σχ. ισοδ. επί του X, και $x,y\in X$.

1) Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

α) $x\sim_{\mathcal{R}} y$

β) $x\in[y]_{\mathcal{R}}$

γ) $y\in[x]_{\mathcal{R}}$

δ) $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$

2) Είτε οι κλάσεις ισοδυναμίας θα ταυτίζονται, δηλ. $[x]_R = [y]_R$, είτε: $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

Απόδειξη:

1) (α) ⇒ (β): Αν $x \sim_R y$, τότε: $x \in [y]_R = \{z \in X / z \sim_R y\}$
$= \{z \in X \mid y \sim_R z\}$

(β) ⇒ (γ): Αν $x \in [y]_R$, τότε: $x \sim_R y$ άρα όπως παραπάνω θα έχω $y \in [x]_R$.

(γ) ⇒ (δ): Έστω ότι $y \in [x]_R$, τότε: $\boxed{x \sim_R y}$ (*)

Έστω $z \in [x]_R \Rightarrow z \sim_R x$ (**) Από τη μεταβατική ιδιότητα:

$z \sim_R y \Rightarrow z \in [y]_R$. Άρα $[x]_R \subseteq [y]_R$

Αν $z \in [y]_R \Rightarrow z \sim_R y$. Όμως $x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$ / ⇒

$\Rightarrow z \sim_R x \Rightarrow z \in [x]_R \Rightarrow [y]_R \subseteq [x]_R$. Άρα ισχύει το δ

(δ) ⇒ (α) Έστω $[x]_R = [y]_R$. Τότε $x \in [x]_R = [y]_R$

$\Rightarrow x \sim_R y$.